

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Численные методы решения уравнений в частных производных
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Суперкомпьютерное моделирование в прикладной физике Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра информатики и вычислительной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 60 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: М.С. Маловичко, канд. техн. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры информатики и вычислительной математики 04.04.2022

Аннотация

Курс направлен на ознакомление студентов с современными численными методами решения уравнений в частных производных. Основной акцент будет сделан на следующих группах численных методов: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод конечных объёмов, метод спектральных элементов. Для каждой группы численных методов рассматриваются элементы теории, методы дискретизации, способы численной реализации, а также решение возникающих алгебраических задач. Изложение ведётся на примере задач, возникающих при моделировании процессов распространения электромагнитного поля, фильтрации жидкости в пористой среде, решении системы уравнений линейной упругости. В курсе предусмотрена программная реализация студентами соответствующих методов на языке Python/C++.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Целью дисциплины является знакомство студентов с современными численными методами решения уравнений в частных производных. Основной акцент будет сделан на следующих группах численных методов: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод конечных объёмов, метод спектральных элементов. Для каждой группы численных методов рассматриваются элементы теории, методы дискретизации, способы численной реализации, а также решение возникающих алгебраических задач. Изложение ведётся на примере задач, возникающих при моделировании процессов распространения электромагнитного поля, фильтрации жидкости в пористой среде, решении системы уравнений линейной упругости. В курсе предусмотрена программная реализация студентами соответствующих методов на языке Python/C++.

Задачи дисциплины

- формирование у обучающихся знаний по современным численным методам, применяемым для решения систем уравнений в частных производных;
- формирование у обучающихся умения формализовать постановку задачи и применить подходящий численный метод;
- формирование умений и навыков реализации расчётных алгоритмов на языках Python/C++.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности

ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные основы построения численных методов решения систем уравнений в частных производных основных типов;
- основные методы дискретизации УЧП и связанные теоретические понятия.

уметь:

- выбирать подходящий тип дискретизации в зависимости от задачи;
- строить численный метод, в том числе с применением открытых библиотек, на языке Python/C++;
- применять подходящий метод решения возникающих алгебраических задач.

владеть:

- теоретическими и практическими знаниями о системах дифференциальных уравнений и численных методах их решения.
- методами программной реализации численных методов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Метод конечных разностей. Элементы теории, принципы конструирования, и программная реализация современных разностных схем для гиперболических, параболических и эллиптических задач.			16	20
2	Метод конечных элементов для эллиптических уравнений. Элементы теории, принципы построения КЭ схем, программная реализация.			16	20
3	Метод спектральных элементов. Элементы теории, принципы построения СЭ схем, программная реализация.			8	11
4	Метод конечных объемов для гиперболических и параболических систем. Элементы теории, принципы построения КО схем, программная реализация.			20	24

Итого часов			60	75
Подготовка к экзамену	0 час.			
Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Метод конечных разностей. Элементы теории, принципы конструирования, и программная реализация современных разностных схем для гиперболических, параболических и эллиптических задач.

Принципы построения КР схем. Разностные схемы для гиперболических систем. Численная ошибка схемы. Компактные схемы. Противопоточная аппроксимация. Схемы высокого порядка. Ограничители наклона. Практикум.

Разностные схемы для параболических систем. Неявная схема. Интегрирование по времени, дискретизация Кранка-Никольсона. Практикум.

Разностные схемы для эллиптических систем. Свойства результирующих СЛАУ. Итерационные методы решения разреженных СЛАУ. Классические методы и методы Крыловского типа. Практикум.

2. Метод конечных элементов для эллиптических уравнений. Элементы теории, принципы построения КЭ схем, программная реализация.

Понятие слабого решения эллиптического уравнения. Вариационная формулировка. Разбиение области и выбор интерполяционных функций. Галёркинское приближение. Линейные и квадратичные КЭ на треугольниках. Билинейные и биквадратичные элементы. Ассемблирование глобальной матрицы. Свойства результирующих СЛАУ и методы их решения. Практикум.

Сходимость МКЭ для коэрцитивных самосопряжённых задач. Ошибка интерполяции. Априорные оценки ошибки в различных нормах. p - и h -сходимость.

Смешанный МКЭ. Консервативные КЭ схемы для уравнений Пуассона и Стокса. Аппроксимация в пространстве $H(\text{div})$. Конечные элементы Равьяра-Тома. Устойчивость смешанного МКЭ. Условие Ладыженской. Решение возникающих алгебраических задач. Практикум.

Векторный МКЭ. Консервативные численные схемы для уравнений Максвелла. Пространство $H(\text{rot})$. Элементы Неделека. Вариационная формулировка гармонической задачи системы уравнений Максвелла. Векторный МКЭ на треугольниках и прямоугольниках. Ассемблирование матриц. Практикум.

3. Метод спектральных элементов. Элементы теории, принципы построения СЭ схем, программная реализация.

Метод спектральных элементов. Проблема повышения порядка аппроксимации. Идея спектрального метода. Аппроксимация полиномами Лежандра-Лобатто. Преобразование координат. Построения спектрально-элементных схем для многомерных областей. Ассемблирование матриц. Свойства возникающих СЛАУ. Сходимость МСЭ и оценки. Эволюционные задачи. Практикум.

4. Метод конечных объёмов для гиперболических и параболических систем. Элементы теории, принципы построения КО схем, программная реализация.

Законы сохранения в дивергентной форме. Принципы МКО. МКО для гиперболических систем. Расщепление, инварианты Римана. Противопоточные схемы, схема Годунова. Схемы повышенного порядка. Ограничители наклона, TVD. Практикум.

Анализ аппроксимации, сходимости и устойчивости конечно-объёмных схем. МКО для параболических задач. Эволюционная нелинейная задача конвекции-диффузии. Способы аппроксимации потоков через границы ячеек. Свойства возникающих алгебраических задач. Явные и неявные схемы. Практикум.

Решение систем нелинейных алгебраических уравнений как задача многомерной оптимизации. Итерации Пикара. Итерации Ньютона. Практикум.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Персональный компьютер или ноутбук с установленным компилятором Python/C++ и сторонними свободно распространяемыми библиотеками MFEM, SuiteSparse, PETSc и некоторыми другими.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Лекции по вычислительной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Б. Петров, А. И. Лобанов. — М. : Интернет-Ун-т Информ. Технологий : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006, 2010, 2013. — 523 с.
000007856, Основы вычислительной физики [Текст]. Ч. 1 / В. Е. Зализняк. Введение в конечно-разностные методы - М. Техносфера, 2008

Дополнительная литература

1. Вычислительная математика. Курс лекций, Электронная версия печатной публикации / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. — Москва, Физматкнига, 2021

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лабораторных работах используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Microsoft Visual Studio, Jupiter Notebooks, Anaconda, Wolfram Mathematica и др.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Обучающийся курсу должен освоить основы конечно-разностной, конечно-элементной, спектрально-элементной и конечно-объёмной аппроксимации систем уравнений в частных производных. Он должен научиться применять полученные знания на практике, реализовывать расчётные алгоритмы в виде программ на языке Python/C++. Освоение курса не сводится только к посещению занятий. Основой успешного прохождения курса является самостоятельная работа студента, которая включает в себя:

- проработку примеров программ и аналитических выкладок с занятий;
- выполнение домашних заданий;
- изучение дополнительных материалов по монографиям, статьям и справочникам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций, специальных семинаров и других мероприятий.

Показателем владения материалом служит умение решать вычислительные задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо самостоятельно решать задачи, писать программы на Python/C++. При решении задач стоит акцентировать внимание на качестве написанного кода и его наглядности, полном понимании всех этапов решения задачи. Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю.

Выполнение домашних заданий является обязательным. Домашние задания могут быть частично или полностью заменены по решению преподавателя на несколько курсовых проектов. Способ оформления и отправки работ сообщается преподавателем дополнительно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Суперкомпьютерное моделирование в прикладной физике Физтех-школа природоподобных, плазменных и ядерных технологий им. И.В. Курчатова кафедра информатики и вычислительной математики
курс:	<u>1</u>
квалификация:	магистр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	М.С. Маловичко, канд. техн. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	УК-1.1 Анализирует проблемную ситуацию как систему, выявляя ее составляющие и связи между ними
	УК-1.2 Осуществляет поиск вариантов решения поставленной проблемной ситуации на основе доступных источников информации
	УК-1.3 Разрабатывает стратегию достижения поставленной цели как последовательность шагов, предвидя результат каждого из них и оценивая их влияние на внешнее окружение планируемой деятельности и на взаимоотношения участников этой деятельности
ОПК-1 Владеет системой фундаментальных научных знаний в области физико-математических наук	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания в области физико-математических наук
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области математики и физики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-4 Способен успешно реализовывать решение поставленной задачи, провести анализ результата и представить выводы, применяя знания и навыки в области физико-математических наук и информационно-коммуникационных технологий	ОПК-4.1 Способен применять знания и навыки по использованию информационно-коммуникационных технологий для поиска и изучения научной литературы, применения прикладных программных продуктов
	ОПК-4.2 Способен применять знания в области физико-математических наук для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен аргументировано выбирать способ проведения научного исследования

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Численные методы решения уравнений в частных производных» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные основы построения численных методов решения систем уравнений в частных производных основных типов;
- основные методы дискретизации УЧП и связанные теоретические понятия.

уметь:

- выбирать подходящий тип дискретизации в зависимости от задачи;
- строить численный метод, в том числе с применением открытых библиотек, на языке Python/C++;
- применять подходящий метод решения возникающих алгебраических задач.

владеть:

- теоретическими и практическими знаниями о системах дифференциальных уравнений и численных методах их решения.
- методами программной реализации численных методов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры контрольных вопросов для текущего контроля освоения материала:

- 1) Приведите примеры эллиптической, гиперболической, параболической, смешанной задачи.

- 2) Что такое аппроксимация, устойчивость, сходимость разностной задачи?
- 3) Почему метод спектральных элементов в расчётной практике не применяют на неструктурных сетках?
- 4) Аппроксимируйте заданную гиперболическую задачу методом спектральных объёмов и выпишите расчётные формулы.

Примеры упражнений на проверку знаний:

- 1) Для модельной эллиптической задачи сформулируйте вариационную постановку и выполните дискретизацию на лагранжевых элементах первого порядка.
- 2) Реализуйте численное решение уравнения переноса в одномерном случае для постоянных коэффициентов.
- 3) Реализуйте численное решение одномерного параболического уравнения методом конечных объёмов.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

Основные типы уравнений в частных производных и их особенности.

Структурные и неструктурные расчётные сетки

Принципы построения разностных схем. Аппроксимация, устойчивость и сходимость.

Разностные схемы для гиперболических систем, их свойства

Разностные схемы для параболических систем, их свойства.

Разностные схемы для эллиптических систем.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Вариационная постановка эллиптической задачи.

Узловые линейные и билинейные конечные элементы

Ассемблирование матриц в МКЭ

Главное и естественное граничное условие в МКЭ.

Априорные оценки ошибок МКЭ.

Задачи с седловой точкой и их КЭ аппроксимация

Законы сохранения: дивергентная и характеристическая формы

Принципы построения конечно-объёмной аппроксимации

Метод конечных объёмов для гиперболических систем и основные особенности

Инварианты Римана и расщепление гиперболических систем

Противопоточная аппроксимация в МКО, схема Годунова

Конечно-объёмные схемы высокого порядка, проблема монотонности

Метод конечных объёмов для параболических задач, способы аппроксимации потоков

Интегрирования по времени в методе конечных объёмов

Принципы метода спектральных элементов

Оценки сходимости метода спектральных элементов

Оценки вычислительной сложности МСЭ

Методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

Критерии оценивания

Оценка выставляется по БРС: балл БРС делится на 10 с округлением вниз

Шкала БРС (сумма = 110):

Работа на семинаре 20 баллов

ДЗ 50

КР 20

Проект 20

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Дифференцированный зачет проводится по итогам сдачи практических и теоретических заданий, предусмотренных программой дисциплины, а также защиты выпускного проекта. Опрос обучающегося не должен превышать одного астрономического часа.